

VEGA HORIZONTI

BR. 4 / SVIBANJ - LIPANJ 2024.

MALI ASTRONOMI - Dodatak za nastavnike i 1. Keplerov zakon

Zvjezdani divovi i patuljci

Piše:
Melita Sambolek
prof.

Hertzsprung-Russellov dijagram ili HR-dijagram, grafički je prikaz ovisnosti snage zračenja, sjaja zvijezda, odnosno njihovih apsolutnih magnituda, o površinskoj temperaturi, odnosno indeksu boje. Sastavili su ga 1911., neovisno jedan o drugome, Ejnar Hertzsprung i Henry Norris Russell. Na osi x nanese su temperature od 40 000 do 2500 K, a na osi y, u logaritamskoj ljestvici, nanesen je sjaj zvijezda od sto tisuća puta slabijeg od Sunčeva, do milijun puta jačeg. U dijagramu se uvrštavaju samo zvijezde poznate udaljenosti, a Sunce, prosječna zvijezda, nalazi se u središtu. HR-dijagram je osnovno vizualno sredstvo za uspoređivanje površinskih svojstava zvijezda, a ona odražavaju masu, kemijski sastav, starost i unutrašnju zvjezdanu građu. U dijagramu se razlikuju glavni niz u kojem se nalazi 90% vidljivih zvijezda: modri divovi (sjajne i vruće zvijezde), prosječne žute zvijezde poput Sunca i crveni patuljci (slaba sjaja i niske temperature), niz crvenih divova i superdivova (sjajne zvijezde niske temperature) i nizovi bijelih patuljaka i subpatuljaka (zvijezde malog sjaja i visoke temperature). HR-dijagram omogućio je također lakše razumijevanje razvoja zvijezda. Zvijezda na glavni niz dopijeva neposredno nakon nastanka, čim u jezgri počne izgarati vodik i tu je vrlo stabilna. Na kojem će mjestu na glavnom nizu zvijezda biti i koliko

će dugo ostati ovisi o njezinoj masi. Primjerice Sunce će se na glavnom nizu zadržati približno 10 milijardi godina. Modri divovi zrače i do 1 000 000 puta jače nego Sunce i jednako toliko puta brže troše svoje zalihe goriva, a crveni patuljci zrače 1000 puta slabije, sporije troše svoje zalihe goriva i najduže jednoliko sjaju. Čim u jezgri zvijezde nestane vodika, ona napušta glavni niz. Primjerice, zvijezde mase poput Sunčeve i veće premjestit će se u područje crvenih divova i superdivova, a kad otpušu vanjski sloj prijeći će u područje bijelih patuljaka.

Wienov zakon

Za otkriće ovog zakona Wilhelm Wien 1911. dobio je Nobelovu nagradu što govori o njegovoj važnosti. Wienov zakon glasi:

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = c$$

gdje određuje valnu duljinu λ_{max} na kojoj je, u ovisnosti o temperaturi T , zračenje crnoga tijela najveće, dok je $c = 2,8978 \times 10^{-3}$ Km Wienova konstanta.

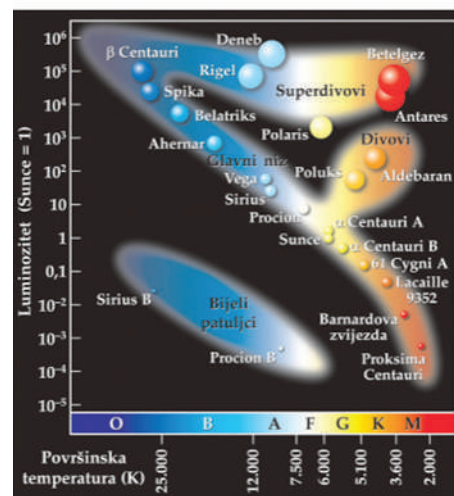
Temperatura je površine Sunca oko 5800 K, pa je Sunčevo zračenje valne duljine 502 nm najintenzivnije, a to je valna duljina na koju su ljudske oči i oči većine životinja najosjetljivije. Temperatura je ljudskog tijela 310 K, pa se njegovo najintenzivnije toplinsko zračenje, valne duljine 10 μm , nalazi u području infracrvene svje-

losti (toplinsko zračenje).

Stefan-Boltzmannov zakon

Prema Stefan-Boltzmannovu zakonu ukupna je snaga zračenja idealnoga crnog tijela (npr. užarenih tijela poput zvijezda) razmjerna četvrtoj potenciji njegove apsolutne temperature: $L = \sigma T^4$, a kako je površina kugle $S = 4\pi R^2$, onda je polumjer zvijezde jednak: gdje je L sjaj zvijezde, T površinska temperatura zvijezde, σ Stefan-Boltzmannova konstanta ($\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$).

Može se uočiti obrnuto razmjerni odnos polumjera zvijezde i temperature, što znači da su zvijezde viših temperatura manjega polumjera i obrnuto.



H-R dijagram: na horizontalnoj osi nalaze se površinske temperature zvijezda i oznake spektralnih razreda, a na vertikalnoj luminozitet (https://www.aad.hr/radovi/Lovro_Pavletic_2009.pdf)

Astronomija u 8. razredu osnovne škole kroz teme

Piše:
KARMEN HABIJAN BUZA
prof.

Otkrivanje čuda Svemira

Dobrodošli u uzbudljivi svijet astronomije! U osmom razredu osnovne škole prema kurikulumnim sadržajima, pripremite se za fascinantno putovanje kroz Sunčev sustav, zvjezdane nebeske i dubine svemira. U idućih 70 sati, istraživat ćemo nevjerojatne pojave i fenomene koji nas okružuju, potičući znatiželju i otkrivanje tajni svemira.

I. Sunčev Sustav

Započnimo naše putovanje upoznavanjem našeg doma - Sunčevog sustava. Sunce, naša zvijezda koja nas svakodnevno grije i osvjetljava, ima ključnu ulogu u održavanju života na Zemlji. No, Sunčev sustav čine mnogo više od samo Sunca. Upoznat ćemo devet planeta, uključujući i našu dragu Zemlju, svaka s vlastitim karakteristikama i tajnama. Osim planeta, istražiti ćemo i mala tijela poput kometa, meteoroida i planetoida te tajanstveno Oortovo oblak, izvor dugoperiodičnih komete. Kroz astronautička istraživanja, otkrit ćemo kako istraživači proučavaju i istražuju Sunčev sustav izbliza, otvarajući nova vrata u našem razumijevanju svemira.

Zamislite da ste astronauti na misiji istraživanja Marsa. Vaš zadatak je

proučiti površinu Marsa i prikupiti uzorke tla radi analize. Kako biste se pripremili za ovu misiju, istražite što više informacija o Marsu i pripremite plan istraživanja. Svoje istraživanje pripremite i kreativno prikažite prezentacijom u radu.

II. Sunce

Kao centralna figura Sunčevog sustava, Sunce nije samo izvor svjetlosti već i važan faktor za razumijevanje procesa u svemiru. Otkrit ćemo građu Sunca, aktivnosti na njegovoj površini te kako Sunčev vjetar i heliosfera utječu na našu planetu. Saznat ćemo i kako Sunčeva magnetosfera štiti Zemlju od štetnih utjecaja svemira, manifestirajući se kroz pojavu poput polarne svjetlosti. Uz to, istražiti ćemo i nastanak Sunca i planeta, što će nam pružiti uvid u formiranje našeg sustava, ali i drugih planetarnih sustava u svemiru.

Napravite model Sunca koristeći materijale poput gline, kartona ili papira. Pokušajte prikazati slojeve Sunca i označiti važne karakteristike poput fotosfere, korone i Sunčevih pjega.

III. Zvijezde

Zvijezde su možda najfascinantniji objekti u svemiru. Njihova svjetlost osvjetljava noćno nebo, a njihove karakteristike otkrivaju nam mnogo o prirodi svemira. Naučit ćemo o udaljenosti zvijezda, njihovoj svjetlosti, boji, temperaturi i masi te kako ih klasificiramo pomoću spektralne analize. Osim toga, istražiti

ćemo dinamiku svemira kroz proučavanje pojava poput dvojnih zvijezda i promjenljivih zvijezda te eksplozija zvijezda poput supernova. Kroz Hertzsprung-Russellov dijagram, dobit ćemo uvid u evoluciju zvijezda te njihovo mjesto u svemiru.

Napravite poster na kojem ćete prikazati različite vrste zvijezda s njihovim karakteristikama i ključnim informacijama. Koristite boje i ilustracije kako biste istaknuli različitosti među njima.

IV. Zvezdani Sustavi

Kroz promatranje i mjerenje udaljenosti dalekih svemirskih objekata, istražiti ćemo kako se zvijezde grupiraju u galaktičke sustave poput Mliječne staze. Upoznat ćemo se s lokalnim galaktičkim jatom, tipovima galaksija te velikim skupinama zvijezda koje zajedno putuju kroz svemir. Kroz ove spoznaje, produbiti ćemo razumijevanje strukture i organizacije svemira te našeg mjesta u njemu.

Napravite prezentaciju o različitim tipovima galaksija i njihovim karakteristikama. Pokušajte uključiti zanimljive činjenice i vizualne elemente kako biste privukli pažnju svojih kolega.

V. Širenje Svemira

Proučavajući pomak prema crvenom i Hubbleov zakon, istražiti ćemo tajne udaljenosti u svemiru te evoluciju samog svemira. Teorije o nastanku i razvoju svemira, poput Velikog praska, pružit će nam uvid u povijest i budućnost naše vasiona te naše mjesto u njoj.

Organizirajte grupnu raspravu o teorijama nastanka svemira, prikazujući argumente za i protiv svake teorije. Pokušajte pronaći poveznice s onim što smo dosad naučili o svemiru. Podijelite svoja saznanja.

VI. Metode opažanja i instrumenti

Kroz elektromagnetski spektar, istražiti ćemo različite valne duljine i kako nam one pomažu u proučavanju svemira. Različiti astronomski instrumenti omogućuju nam da promatramo svemir iz svih kutova, a projekti poput James Webb svemirskog teleskopa pružaju nam uvid u najnovije



tehnološke dostignuća u istraživanju svemira.

Organizirajte terenski izlet u lokalnu zvjezdarnicu ili opservatorij kako biste vidjeli kako se astronomija praktično provodi. Upoznajte se s različitim teleskopima i instrumentima te razgovarajte s astronomima o njihovom radu.

Dok završavamo naše putovanje kroz čuda svemira, otvaramo nova vrata u razumijevanju svemira i našeg mjesta u njemu. Kroz strast, znatiželju i istraživački duh, postajemo svjedoci nevjerojatnih fenomena i otkrića koji nas čekaju u beskonačnim dubinama svemira. Učenje o astronomiji ne samo da nam pruža uvid u ogromnost svemira, već i potiče naše maštanje, kreativnost i istraživački duh, otvarajući put ka novim otkrićima i spoznajama.

Primjeri pitanja i zadataka za Školsko i Županijsko natjecanje iz astronomije za 8. razred osnovne škole zaokruživanjem jednog točnog odgovora boduju se s 2 boda ili kada dopunjuju se rečenice, te u problemskim zadacima može se u svakom skupiti do 10 bodova. Evo tema primjera zadataka koji predstavljaju tipične izazove s kojima se učenici mogu susresti na natjecanjima iz astronomije u osmom razredu osnovne škole.

Identifikacija nebeskih tijela:

Zadatak: Na temelju opisa ili slika, identificirajte nebeska tijela poput planeta, zvijezda, galaksija ili zvjezdanih skupova.

Na primjer: Nacrtaj tri zvijezda ljetnoga neba po izboru te označi položajem i imenom a zvijezdu u svakome od tih triju zvijezda.

Prema kojem je objektu, koji se nalazi u zvijezdu Herkula, emitirana poznata „Poruka iz Areciba“?

Izračunavanje udaljenosti:

Zadatak: Koristeći poznate informacije o udaljenosti nebeskih tijela ili korištenjem osnovnih metoda kao što su paralaksa, izračunajte udaljenost između nekih nebeskih tijela.

Na primjer: Optički teleskopi neizostavni su alati za astronome. To su optički instrumenti koji nam omogućavaju proučavanje nebeskih tijela.



a. Navedi tri osnovne vrste teleskopa prema načinu stvaranja slike.

b. Skiciraj izgled Newtonova teleskopa te jasno naznači tubus i sve optičke elemente.

c. Proučavamo nebeski objekt te nalazimo da je njegov kutni promjer $0,6^\circ$. Kolika je veličina slike objekta u žarištu objektiva, ako je žarišna daljina jednaka 40 cm?

d. Želimo promatrati zvijezdu za koju znamo da joj se sjaj povećao s 6 na 1 zvjezdanu magnitudu. Koliko se zvijezdi povećao svjetlosni tok?

e. Odredi povećanje teleskopa koji ima objektiv žarišne daljine 5 m, a okular žarišne daljine 16 mm.

Poznavanje astronomskih pojmova:

Zadatak: Definirajte osnovne pojmove iz astronomije poput planeta, zvijezda, galaksija, crnih rupa, asteroida, kometa, svjetlosnih godina, parseka itd.

Na primjer: 1. Sirius je zvijezda udaljena od Zemlje 2,63 pc (parseka).

a) Odredi njezinu udaljenost u svjetlosnim godinama.

b) Odredi njezinu udaljenost u astronomskim jedinicama.

c) Izrazi udaljenost u metrima.

d) Odredi kut paralakse.

2. Nacrtaj zvijezde Lava te

a. označi i navedi imena njegovih dviju zvijezda.

b. U zvijezdu se nalaze radijant meteorskoga roja i nekoliko galaktika.

Navedite ime

meteorskoga roja i dvije spiralne galaktike: _____ Leonidi te M66, M65, M95, M96, NGC 2903 i NGC 3628 _____

Analiza astronomskih pojava:

Zadatak: Analizirajte astronomsku pojavu poput pomračenja, prolaska planeta ispred Sunca (tranzita), kretanja zvijezda na noćnom nebu, meteorita itd., i objasnite što se događa i zašto.

Na primjer: Kako nazivamo malo kameno ili metalno nebesko tijelo promjera od 100 μm do oko 1 m katkad uđe u Zemljinu atmosferu te padne na Zemljino tlo?

Proučavanje Sunčevog sustava:

Zadatak: Odredite karakteristike planeta u Sunčevom sustavu poput promjera, mase, sastava atmosfere, broja satelita itd.

Na primjer: 1. Ako je period kruženja satelita B 27 puta manji od perioda kruženja satelita A, na kojoj udaljenosti od središta planeta kruži satelit B u odnosu na satelit A?

2. Prirodni satelit planeta Saturn, Mimas ili Mima otkrio je 1789. William Herschel.

Mimas je maleni satelit promjera od samo 397,2 km i orbitalnim periodom od 22 sata

37 minuta i 5 sekundi. Kruži na udaljenosti od 185 520 km. Odredi njegovu srednju

gustoću, ako mu masa iznosi 3,75 \cdot 10¹⁹kg. (Volumen kugle određuje se prema izrazu $V = \frac{4\pi r^3}{3}$).

Rješavanje problema na temelju



astronomske fotografije:

Zadatak: Analizirajte fotografiju neba i riješite probleme poput identifikacije zvijezda, galaksija, planetarnih maglica, kretanja nebeskih tijela itd. Na primjer: Dana 7. veljače 2023. Sunčeva je aktivnost zabilježena sljedećim podacima: u fotosferi se nalazilo 5 grupa i 17 pjega. Izračunaj Wolfov broj uz uvjet da je konstanta

instrumenta, motritelja i uvjeta motrenja $k = 1$.

Istraživanje astronomske povijesti:

Zadatak: Istražite važne trenutke u povijesti astronomije poput otkrića novih planeta, razvoja teleskopa, doprinosa poznatih astronom(a) ili astronomkinja itd.

Pripreme za promatranje (preuzeti materijali iz <https://eskola.zvjezdarnica.hr/>)

Putovanje kroz Svemir: Priprema za Astronomska promatranja

Prije nego što se otisnete na nezaboravno putovanje kroz svemir, važno je pripremiti se na pravi način kako biste maksimalno iskoristili svaku sekundu promatranja. U ovom članku, otkrit ćemo vam korake pripreme, savjete i zanimljive činjenice koje će vam pomoći da vaše astronomsko promatranje bude ne samo uspješno, već i nevjerojatno zabavno.

Pronalazak i priprema promatračkog mjesta

Prva faza vašeg putovanja je pronalazak savršenog promatračkog mjesta. Odaberite mjesto koje je sigurno, prostrano i slobodno od ometanja. Danju je najbolje istražiti lokaciju kako biste provjerili je li horizont slobodan od prepreka, a noću će vam biti lakše snalaženje ako ste već upoznati s okolinom. Uvijek je sigurnije i zabavnije promatrati svemir u grupi, pa pozovite prijatelje ili obitelj da vam se pridruže na tom nezaboravnom putovanju.

Prikladna odjeća i oprema

Budite spremni na sve vremenske uvjete! Zimi, slojevito odijevanje je ključno za zadržavanje topline, dok će ljeti biti potrebna toplija odjeća za noćna promatranja. Ne zaboravite topli napitak u termos boci kako biste se ugrijali tijekom hladnih noći pod zvjezdanim nebom.

Privikavanje oka na tamu i korištenje svjetla

Kako biste u potpunosti uživali u promatranju, važno je da vaše oči budu priviknute na tamu. Početno privikavanje obično traje između 15 i 30 minuta, ali prava čarolija događa se nakon što se vaše oči potpuno prilagode mraku. Kako biste očuvali osjetljivost oka na tamu, koristite svjetla s crvenim filtrom. Ova svjetla neće narušiti vašu priviknutost na mrak i omogućit će vam jasniji pogled na nebo.

Bilježenje promatranja

Svako putovanje treba dokumen-

tirati, pa tako i vaše putovanje kroz svemir. Prije promatranja, pripremite obrazac za bilježenje opažanja u kojem ćete zabilježiti sve relevantne informacije o vašem promatranju. Neka vaši zapisi budu detaljni i precizni kako biste kasnije mogli analizirati svoje promatranje i podijeliti svoje iskustvo s drugima.

Primjer

Bilježenja promatranja: Velika Kola
Evo primjera obrasca za bilježenje promatranja kao inspiracije za vaše vlastite zapise:

OBRAZAC ZA BILJEŽENJE PROMATRANJA

OBJEKT: Velika kola

MJESTO: Strahoninec, igralište

INSTRUMENT: Astronomske gromblje

METODA: Vizualna

VRIJEME: od 22:15 do 22:45 (SEV) ili od 20:15 do 20:45 (UT)

VREMENSKI UVJETI: VEDRO

CRTEŽ ILI OPIS: (Ovdje možete opisati svoje opažanje ili nacrtati ono što ste vidjeli)

Zaključak

Priprema je ključna za uspješno i nezaboravno astronomsko promatranje. Slijedite ove korake i savjete, pripremite se na avanturu vašeg života i uživajte u čarima svemira. Sada kada ste spremni, podignite svoj teleskop, uputite pogled prema nebu i započnite svoje putovanje kroz beskonačnost svemira!

Prvi Keplerov zakon

Jona Doring

February 2024

1 Elipsa - svojstva

Elipsa je skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od dvije zadane (fiksne) točke te ravnine konstantan. Sada definirajmo neke pojmove koji će nam pomoći izvesti jednadžbu elipse. Pretpostavimo da se središte nalazi u točki $S(0, 0)$, žarišta ili fokusi se nalaze u točkama $F_1(-e, 0)$ i $F_2(e, 0)$, vrhovi ili tjemena se nalaze kako je označeno na slici $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, -b)$, $D(0, b)$. Velika ili glavna os elipse zadana je $|AB| = 2a$ dok je mala ili sporedna os zadana $|CD| = 2b$. Još moramo uvesti pojmove velike ili glavne poluosi elipse definirane $|AS| = |SB| = a$ te male ili sporedne poluosi elipse definirane $|CS| = |SD| = b$. Sada kada smo definirali sve pojmove možemo izvesti jednadžbu za elipsu sa središtem u $S(0, 0)$, dok ćemo za elipsu sa središtem u $S(p, q)$ samo malo promijeniti izvod.

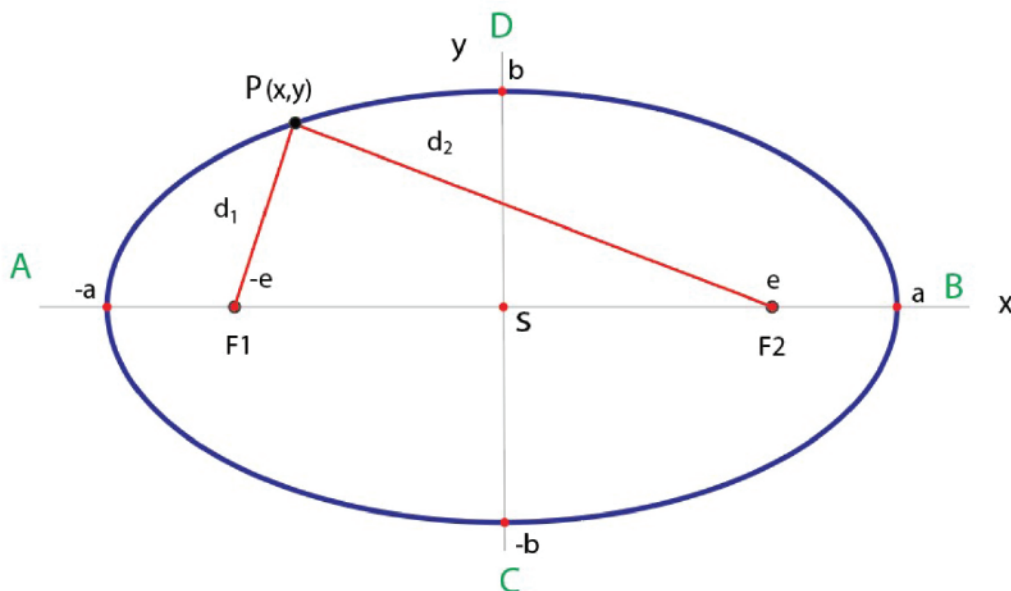


Figure 1: Elipsa sa središtem u $S(0,0)$.

Linearni ekscentricitet elipse definiramo kao $|F1S| = |SF2| = e$. Ako točku P premjestimo u točku B vidimo da će:

$$d_1 + d_2 = a - e + a + e = 2a \quad (1)$$

što je konstanta.

Ako sada točku P premjestimo u točku D imamo po Pitagorinom poučku da su d_1 i d_2 jednaki i to $d_1 = d_2 = a$:

$$d_1 = d_2 = \sqrt{e^2 + b^2} = a \quad (2)$$

Kvadriramo li izraz i izrazimo li linearni ekscentricitet imamo:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (3)$$

Podjelimo li linearni ekscentricitet parametrom a dobivamo numerički ekscentricitet koji nam je bitan u općenitom razmatranju elipse jer kada je on jednak 0, odnosno $a = b$ imamo kružnicu, a kada teži u 1 tada se elipsa približava obliku pravca.

Numerički ekscentricitet - ϵ :

$$\epsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (4)$$

Općenito iz jednadžbe vrijedi da je $\epsilon < 1$.

Sada imamo sve potrebno za izvod jednadžbe elipse:

$$d_1 = \sqrt{(e - x)^2 + y^2} \quad (5)$$

$$d_2 = \sqrt{(e + x)^2 + y^2} \quad (6)$$

$$d_1 + d_2 = 2a = \sqrt{(e - x)^2 + y^2} + \sqrt{(e + x)^2 + y^2} \quad (7)$$

$$\sqrt{(e + x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e - x)^2 + y^2} \quad (8)$$

$$(e+x)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2})^2 \quad (9)$$

$$(e+x)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + (e-x)^2 + y^2 \quad (10)$$

$$4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 4a^2 + (e-x)^2 - (e+x)^2 \quad (11)$$

$$4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 4a^2 + e^2 - 2ex + x^2 - e^2 - 2ex - x^2 = 4a^2 - 4ex \quad (12)$$

$$\sqrt{(e-x)^2 + y^2} = a - \frac{e}{a}x \quad (13)$$

$$(e-x)^2 + y^2 = a^2 - 2a\frac{e}{a}x + \frac{e^2}{a^2}x^2 \quad (14)$$

$$e^2 - 2ex + x^2 + y^2 = a^2 - 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2 \quad (15)$$

$$e^2 + x^2 + y^2 = a^2 + \frac{e^2}{a^2}x^2 \quad (16)$$

$$x^2(\frac{a^2 - e^2}{a^2}) + y^2 = a^2 - e^2 \quad (17)$$

$$x^2(\frac{b^2}{a^2}) + y^2 = b^2 \quad (18)$$

Naposljetku imamo jednadžbu elipse sa središtem u S(0,0):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (19)$$

Ako želimo jednadžbu elipse sa središtem u nekoj drugoj točki S(p,q) preformuliramo postojeću:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \quad (20)$$

Bitno je navesti i jednadžbu elipse u polarnom obliku gdje imamo ovisnost radijusa r o kutu θ .

U polarnom sustavu:

$$x = r(\theta)\cos(\theta) \quad (21)$$

$$y = r(\theta)\sin(\theta) \quad (22)$$

Centrirana u desnom fokusu:

$$\left(\frac{x+ae}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)^2 = 1 \quad (23)$$

Sada uvrstimo x i y :

$$\left(\frac{r(\theta)\cos(\theta) + ae}{a}\right)^2 + \left(\frac{r(\theta)\sin(\theta)}{a\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)^2 = 1 \quad (24)$$

$$\left(\frac{r(\theta)\cos(\theta) + ae}{a}\right)^2 + \left(\frac{r(\theta)\sin(\theta)}{a\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)^2 = 1 \quad (25)$$

$$r^2 \cos^2(\theta) + 2a\epsilon r \cos(\theta) + a^2\epsilon^2 + \frac{r^2 \sin^2(\theta)}{1-\epsilon^2} = a^2 \quad (26)$$

Sada izvučemo r , pomoću kvadratne jednadžbe:

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos(\theta)} \quad (27)$$

Odnosno, što će nam kasnije trebati:

$$a\left(\frac{1-\epsilon^2}{r}\right) = 1 + \epsilon\cos(\theta) \quad (28)$$

1.1 Prvi Keplerov zakon - izvod preko Newtonove dinamike

Uz poznat sustav planeta koji se po elipsi giba oko Sunca smještenog u jednom od žarišta elipse pokušat ćemo dokazati da ta putanja doista jest elipsa krećući "unatrag" odnosno koristeći Newtonovu dinamiku pa ćemo vidjeti jesmo li u pravu.

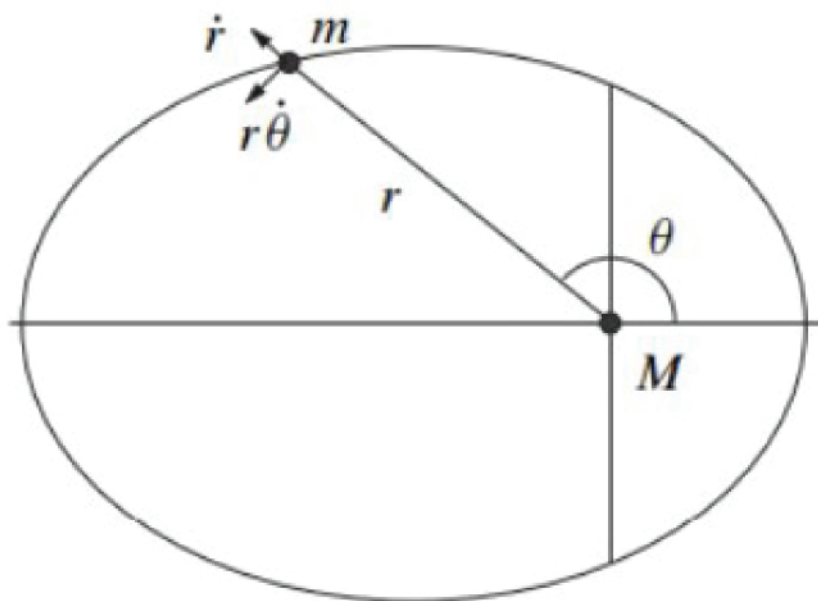


Figure 2: Planet koji se giba oko Sunca po elipsi.

Masa m (planet) se nalazi na udaljenosti r od mase M (Sunca). Koristeći te podatke te prethodno znanje o kinematici te dinamici gibanja kao energiju orbitalnog gibanja planeta možemo pisati:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} \quad (29)$$

gdje je v brzina gibanja planeta oko Sunca, a G je konstanta gravitacije. Kako se planet giba po elipsi njegova brzina se može raspisati na radijalnu i kružnu komponentu. Radijalna komponenta jednaka je $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$, a kružna komponenta je $r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}$. Ako ih tako razdvojimo možemo energiju pisati u polarnom obliku kao:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GmM}{r} \quad (30)$$

Daljni korak je pronalaženje kutnog momenta gibanja L :

$$L = mr^2\dot{\theta} \quad (31)$$

Ako je brzina planeta definirana kao:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (32)$$

Ako deriviramo taj izraz s obzirom na vrijeme da dobijemo akceleraciju dobivamo:

$$\vec{a} = (\ddot{r} + r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \quad (33)$$

Mi ćemo koristiti \hat{r} komponentu akceleracije da pišemo jednadžbu:

$$\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad (34)$$

Izrazimo $\dot{\theta}$ iz jednadžbe preko L da bismo mogli integrirati:

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{L^2}{m^2r^3} \quad (35)$$

Sada supstituiramo $u = 1/r$ pa izrazimo:

$$L = \frac{m}{u^2} \frac{d\theta}{dt} \quad (36)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{Lu^2}{m} \frac{d}{d\theta} \quad (37)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{u} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \quad (38)$$

$$\ddot{r} = -\frac{L^2u^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} \quad (39)$$

Izraz (34) umetnemo u jednadžbu (30) te dobijemo:

$$-\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -GMu^2 + \frac{L^2 u^3}{m^2} \quad (40)$$

$$-\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -GMu^2 + \frac{L^2 u^3}{m^2} \quad (41)$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2} \quad (42)$$

Sada je ovu diferencijalnu jednadžbu vrlo lako riješiti:

Homogeno rješenje izrazimo kao rješenje jednadžbe:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = 0 \quad (43)$$

A to je:

$$u_h(\theta) = A \cos(\theta) \quad (44)$$

Dok za partikularno rješenje pretpostavimo:

$$u_p = C \quad (45)$$

Uvrstimo sad to rješenje u jednadžbu (37) i dobijemo:

$$C = \frac{GMm^2}{L^2} \quad (46)$$

Ukupno rješenje dano je kao:

$$u(\theta) = A \cos(\theta) + \frac{GMm^2}{L^2} \quad (47)$$

Odnosno vratimo supstituciju:

$$\frac{1}{r} = A \cos(\theta) + \frac{GMm^2}{L^2} \quad (48)$$

Što odgovara uz promjenu konstanta polarnom obliku jednadžbe za elipsu:

$$a\left(\frac{1 - \epsilon^2}{r}\right) = 1 + \epsilon \cos(\theta) \quad (49)$$

Time smo potvrdili Keplerovo otkriće.

